Géométrie élémentaire de l'espace

$\mathcal{E}$ désigne l'espace géométrique usuel. Comme dans le plan, on retrouve les notations $\overrightarrow{AB}$, $\vec{o}$ et $A+\vec{u}$.

I. Notions communes

1°) Vecteurs de l'espace

Déf : On appelle direction de $\mathcal{E}$ l'ensemble E formé de ses vecteurs, i.e. $E=\left\{\overrightarrow{AB}/A,B\in\mathcal{E}\right\}$.

L'ensemble E est muni d'une addition : $\begin{cases}E\times E\to E\\(\vec{u},\vec{v})\mapsto\vec{u}+\vec{v}\end{cases}$.

L'ensemble E est muni d'un produit extérieur réel : $\begin{cases}\mathbb{R}\times E\to E\\(\alpha,\vec{u})\mapsto\alpha.\vec{u}\end{cases}$.

On a les mêmes propriétés calculatoires que dans le plan.

Déf : Deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ de l'espace sont dits colinéaires ssi $\exists(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ tel que $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{o}$.

Déf : Trois vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ de l'espace sont dits coplanaires ssi $\exists(\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0)$ tel que $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\nu\vec{w}=\vec{o}$.

Théorème :

Soit $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

$\forall\vec{t}\in E$, $\exists!(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{t}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}+\gamma\vec{w}$.

On dit alors que $\vec{t}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.

Déf : La longueur (ou norme) d'un vecteur $\vec{u}\in E$ est notée $\|\vec{u}\|$.

Prop : $\forall\vec{u},\vec{v}\in E$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$\|\vec{u}\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{o}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ et $\|\lambda.\vec{u}\|=|\lambda|\|\vec{u}\|$.

2°) Orientation usuelle de l'espace

Déf : Une famille de trois vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ non coplanaires est dite directe ssi « on peut positionner le pouce, l'index et le majeur de la main droite selon la direction et le sens des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre ». Sinon cette famille sera dite indirecte.

Prop : $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, $(\vec{v},\vec{w},\vec{u})$ et $(\vec{w},\vec{v},\vec{u})$ ont même orientation.

$(\vec{u},\vec{w},\vec{v}),(\vec{w},\vec{v},\vec{u})$ et $(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$ sont d'orientation opposée à $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

$(\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w})$ a même orientation que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ si $\alpha>0$ et est d'orientation opposée si $\alpha<0$.

3°) Angle dans l'espace

Tout comme dans le plan, on définit la notion d'écart angulaire entre deux vecteurs non nuls de l'espace et on retrouve les notions attenantes : angle aigu, obtus, droit... figure

En revanche, on ne peut pas définir de notion d'angle orienté.

4°) Droite de l'espace

Tout comme dans le plan, on définit la notion de droite dans l'espace.
On retrouve les notions de direction, de vecteur directeur, de parallélisme et de distance algébrique sur une droite orientée.
En revanche, dans l'espace :
une droite ne peut pas être définie par un point et un vecteur normal, figure
deux droites non parallèles ne sont pas nécessairement sécantes. figure

5°) Plan de l'espace

Déf : Soit A un point et $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

On appelle plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}$ est

combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $(A;\vec{u};\vec{v})$.
Ainsi $(A;\vec{u};\vec{v}) = \{A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} / \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.

Déf : On appelle direction d'un plan $\mathcal{P}$ l'ensemble P formé de ses vecteurs, i.e. $P = \left\{\overrightarrow{AB} / A,B \in \mathcal{P}\right\}$.
On appelle couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$, un couple formé de deux vecteurs non colinéaires de P.

Prop : Un plan est entièrement déterminé par un point et un couple de vecteurs directeurs.

Prop : Soit $A,B,C \in \mathcal{E}$ non alignés. Il existe un unique plan passant par ces trois points, on le note (ABC), c'est le plan $\mathcal{P} = (A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Déf : Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ ssi il est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$. figure

Prop : Un plan est entièrement déterminé par un point et un vecteur normal.

6°) Incidence

Déf : Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dit parallèles ssi ils ont même direction.
On note alors $\mathcal{P} // \mathcal{P}'$.

Prop : Deux plans parallèles sont distincts ou confondus.

Prop : L'intersection de deux plans non parallèles est une droite.

Déf : Une droite $\mathcal{D}$ est dite parallèle à un plan $\mathcal{P}$ ssi la direction de $\mathcal{D}$ est incluse dans celle de $\mathcal{P}$. On note alors $\mathcal{D} // \mathcal{P}$.

Prop : Une droite parallèle à un plan est soit incluse dans celui-ci, soit disjointe de celui-ci.

Prop : L'intersection d'un plan est d'une droite qui ne lui soit pas parallèle est un point.

Prop : Deux droites sécantes sont coplanaires.

Prop : Deux droites non coplanaires sont disjointes.

7°) Barycentre

Comme dans le plan, on définit la notion de barycentre.
On retrouve exactement les mêmes propriétés.

II. Produits scalaire, vectoriel et mixte

1°) Produit scalaire

Déf : On appelle produit scalaire de $\vec{u},\vec{v} \in E$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ avec $\theta = \text{Ecart}(\vec{u},\vec{v})$

Prop : (Symétrie du produit scalaire) $\forall \vec{u},\vec{v} \in E$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

Théorème :
$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in E$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$:
$\vec{u}\cdot(\lambda.\vec{v} + \mu.\vec{w}) = \lambda.\vec{u}\cdot\vec{v} + \mu.\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v})\cdot\vec{w} = \lambda.\vec{u}\cdot\vec{w} + \mu.\vec{v}\cdot\vec{w}$.

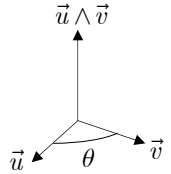
Prop : $\forall \vec{u},\vec{v} \in E$:
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$,
$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$,
$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v})$ et
$4\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

Prop : Soit $A,B \in \mathcal{E}$ distincts. L'ensemble des points équidistants de A et B est le plan passant par $I = m[A,B]$ orthogonal à (AB). On l'appelle plan médiateur du segment $[A,B]$.

2°) Produit vectoriel

a) définition

Déf : Le produit vectoriel est une opération qui a deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace en associe un troisième, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, appelé produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et défini de la manière suivante :
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}$.
Sinon, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est le vecteur déterminé par :
1. $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
2. $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ avec $\theta=\text{Ecart}(\vec{u},\vec{v})\in]0,\pi[$,
3. la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est directe.



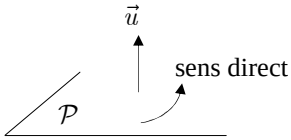
Prop : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Prop : $\forall\vec{u},\vec{v}\in E$, $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.

Prop : (antisymétrie du produit vectoriel)
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$.

b) construction géométrique

Soit $\vec{u}\in E$ non nul et $O\in\mathcal{E}$.
Notons $\mathcal{P}$ le plan passant par O dont $\vec{u}$ est vecteur normal.
Orientons le plan $\mathcal{P}$ de sorte que le sens direct sur $\mathcal{P}$ correspond au sens de vissage en progression vers $\vec{u}$. On dit que $\mathcal{P}$ est muni de l'orientation induite par $\vec{u}$.



Soit $\vec{v}\in E$ non colinéaire à $\vec{u}$. Nous allons proposer une construction géométrique de $\vec{u}\wedge\vec{v}$.
Considérons M et P les points de l'espace déterminés par $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OP}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.
Soit M' le projeté de M sur $\mathcal{P}$.
On a $OM'=OM\sin\theta=\|\vec{v}\|\sin\theta$ avec $\theta=\text{Ecart}(\vec{u},\vec{v})$.
Soit M'' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Les familles $(\vec{u},\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM''})$ et $(\vec{u},\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OP})$ sont orthogonales directes donc $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OM''}$ avec $\alpha>0$.
Or $OP=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ et $OM''=OM'=\|\vec{v}\|\sin\theta$ donc $\alpha=\|\vec{u}\|$.
Ainsi P s'obtient en projetant M sur le plan $\mathcal{P}$ puis en appliquant une rotation d'angle $\pi/2$ et une homothétie de rapport $\|\vec{u}\|$.

c) bilinéarité du produit vectoriel

Prop : $\forall\vec{u},\vec{v}\in E,\forall\alpha\in\mathbb{R}$: $\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha.(\vec{u}\wedge\vec{v})$.

Prop : $\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E$, $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$.

Théorème : (bilinéarité du produit vectoriel)
$\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E$ et $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:
$\vec{u}\wedge(\alpha.\vec{v}+\beta.\vec{w})=\alpha.(\vec{u}\wedge\vec{v})+\beta.(\vec{u}\wedge\vec{w})$ et $(\alpha.\vec{v}+\beta.\vec{w})\wedge\vec{u}=\alpha.(\vec{v}\wedge\vec{u})+\beta.(\vec{w}\wedge\vec{u})$.

3°) Produit mixte

Déf : On appelle produit mixte (ou déterminant) de trois vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ de l'espace le réel : $\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Prop : $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ coplanaires ssi $\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$.
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ directe ssi $\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})>0$.
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ indirecte ssi $\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})<0$.

Prop : (Antisymétrie du produit mixte)
$\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\text{Det}(\vec{v},\vec{w},\vec{u})=\text{Det}(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$ et
$\text{Det}(\vec{v},\vec{u},\vec{w})=\text{Det}(\vec{w},\vec{v},\vec{u})=\text{Det}(\vec{u},\vec{w},\vec{v})=-\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

Théorème : (Trilinéarité du produit mixte)
$\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{t}\in E$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$\text{Det}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{w},\vec{t})=\alpha\,\text{Det}(\vec{u},\vec{w},\vec{t})+\beta\,\text{Det}(\vec{v},\vec{w},t)$, $\text{Det}(\vec{u},\alpha\vec{v}+\beta\vec{w},\vec{t})=\alpha\,\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{t})+\beta\,\text{Det}(\vec{u},\vec{w},\vec{t})$,
$\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}+\beta\vec{t})=\alpha\,\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\beta\,\text{Det}(\vec{u},\vec{v},t)$.

III. Coordonnées cartésiennes dans l'espace

1°) Repère cartésien

Déf : On appelle repère cartésien de l'espace, tout quadruplet $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ formé d'un point O et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.
Le point O est appelé origine du repère.
Les vecteurs $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sont appelés vecteurs de bases du repère.
Les droites $(Ox)=(O,\vec{i})$, $(Oy)=(O;\vec{j})$ et $(Oz)=(O;\vec{k})$ sont appelées axes du repère $\mathcal{R}$.

Prop : Soit $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère cartésien de l'espace.
$\forall\vec{u}\in E$, $\exists!(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u}=\alpha.\vec{i}+\beta.\vec{j}+\gamma.\vec{k}$,
$\forall M\in\mathcal{E}$, $\exists!(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$.

Déf : Avec les notations ci-dessus :
α,β,γ sont appelées composantes du vecteur $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$,
x,y,z sont appelées coordonnées du point M dans $\mathcal{R}$.
La première coordonnée est appelée abscisse, la deuxième ordonnée, et la troisième cote.

Déf : Munir l'espace $\mathcal{E}$ d'un repère $\mathcal{R}$, c'est considérer que les coordonnées des points et les composantes des vecteurs sont toutes lues dans $\mathcal{R}$.
On note $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ ou $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{vmatrix}$ pour signifier que $\vec{u}$ est le vecteur de composantes α,β,γ .
On note $M(x,y,z)$ ou $M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ pour signifier que M est point de coordonnées x,y,z .

Prop : On suppose l'espace muni d'un repère $\mathcal{R}$.
Pour $A\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix}$, $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{vmatrix}$ on a :
$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{vmatrix}$, $(A+\vec{u})\begin{vmatrix}x+\alpha\\y+\beta\\z+\gamma\end{vmatrix}$, $(\vec{u}+\vec{v})\begin{vmatrix}\alpha+\alpha'\\\beta+\beta'\\\gamma+\gamma'\end{vmatrix}$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $(\lambda.\vec{u})\begin{vmatrix}\lambda\alpha\\\lambda\beta\\\lambda\gamma\end{vmatrix}$.

Prop : On suppose l'espace muni d'un repère $\mathcal{R}$.
Si $G\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ est barycentre des points $A_1\begin{vmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{vmatrix},\ldots,A_n\begin{vmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{vmatrix}$ affectés des masses $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ telles que $\lambda_1+\cdots+\lambda_n\neq 0$ alors :
$x=\dfrac{\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$, $y=\dfrac{\lambda_1y_1+\cdots+\lambda_ny_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$ et $z=\dfrac{\lambda_1z_1+\cdots+\lambda_nz_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$.

2°) Repère orthonormé

a) définition

Déf : Un repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est dit orthonormé ssi les vecteurs $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sont unitaires et deux à deux orthogonaux.
Si de plus la famille $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe alors le repère orthonormé $\mathcal{R}$ est qualifié de direct et d'indirect sinon.
(figure)

Prop : Si $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé alors $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$ eu $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$.

Prop : Si $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct alors $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$ et $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\wedge\vec{j}=-i$, $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$.

Prop : Soit $O\in\mathcal{E}$ et $\vec{u},\vec{v}$ vecteurs unitaires et orthogonaux.
$\mathcal{R}=(O,\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

b) expression du produit scalaire

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Théorème :

Pour $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{vmatrix}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'$.

Cor : On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

Pour $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$, $A\begin{vmatrix}x\\ y\\ z\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{vmatrix}$, on a :

$\|\vec{u}\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ et $AB=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$.

Prop : $\forall\vec{u}\in E$, les composantes de $\vec{u}$ sont $\alpha=\vec{u}\cdot\vec{i}$, $\beta=\vec{u}\cdot\vec{j}$ et $\gamma=\vec{u}\cdot\vec{k}$.

$\forall M\in\mathcal{P}$, les coordonnées de M sont $x=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}$, $y=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}$, et $z=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{k}$.

c) expression du produit vectoriel

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Théorème :

Si $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$ alors $\vec{v}\begin{vmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{vmatrix}$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{vmatrix}\beta\gamma'-\beta'\gamma\\ \gamma\alpha'-\gamma'\alpha\\ \alpha\beta'-\alpha'\beta\end{vmatrix}$.

Cor : (Formule du double produit vectoriel)
$\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E$, $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}.\vec{w}).\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$.

d) expression du produit mixte

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Déf : Soit $x,y,z,x',y,',z',x'',y'',z''$ des réels.

On note $\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}=(xy'z''+x'y''z+x''yz')-(xy''z'+x'uz''+x''y'z)$

Théorème :

Si $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$, $\vec{v}\begin{vmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{vmatrix}$ et $\vec{w}\begin{vmatrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{vmatrix}$ alors $\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha' & \alpha''\\ \beta & \beta' & \beta''\\ \gamma & \gamma' & \gamma''\end{vmatrix}$.

Cor : $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$, $\vec{v}\begin{vmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{vmatrix}$ et $\vec{w}\begin{vmatrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{vmatrix}$ sont coplanaires ssi $\begin{vmatrix}\alpha & \alpha' & \alpha''\\ \beta & \beta' & \beta''\\ \gamma & \gamma' & \gamma''\end{vmatrix}=0$.

$A\begin{vmatrix}x\\ y\\ z\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}x''\\ y''\\ z''\end{vmatrix}$, $D\begin{vmatrix}x'''\\ y'''\\ z'''\end{vmatrix}$ sont coplanaires ssi $\begin{vmatrix}x'-x & x''-x & x'''-x\\ y'-y & y''-y & y'''-y\\ z'-z & z''-z & z''-z\end{vmatrix}=0$.

3°) Paramétrage d'une courbe

On suppose l'espace muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Déf : Soit $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ trois fonctions réelles définies sur un intervalle I. On appelle courbe définie par le paramétrage $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I$ l'ensemble formé des points $M \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$ avec $t \in I$.

4°) Equation cartésienne d'une surface

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) définition

Déf : Soit $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ l'ensemble formé des points M dont les coordonnées x, y, z vérifient $f(x, y, z) = 0$. On note $\Sigma : f(x, y, z) = 0$, pour signifier que Σ est la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.

b) équation cartésienne de plan

Théorème :

Soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Les plans de l'espace donc $\vec{n} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ est vecteur normal sont les surfaces possédant une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz = d$.

c) système d'équations cartésiennes de droites

Théorème :

Les droites $\mathcal{D}$ de l'espace correspondent aux ensembles formés des points dont les coordonnées x, y, z vérifient un système du type : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ avec $\vec{n} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}$ non colinéaires.

On note alors $\mathcal{D} : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

5°) Distance

a) distance d'un point à un plan

Théorème :

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz = d$ et $M \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$.

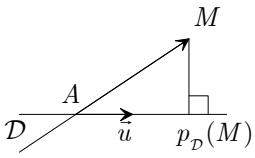
La distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

b) distance d'un point à une droite

Théorème :

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A, dirigée par $\vec{u} \neq \vec{o}$ et M un point.

La distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ est $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{u} \right\|}$.



6°) Perpendiculaire commune

Déf : Deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires ssi elles sont orthogonales (i.e. de vecteurs directeurs orthogonaux) et sécantes.

Théorème :

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires de $\mathcal{E}$. Il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Δ est appelée perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

IV. Cylindres et sphères

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1°) Cylindre de l'espace

Déf : Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ et $R\geq 0$.
On appelle cylindre d'axe $\mathcal{D}$ et de rayon R l'ensemble des points M se situant la distance R de $\mathcal{D}$.
Lorsque $R=0$, on parle de cylindre droite. Lorsque $R>0$, on parle de vrai cylindre.

Prop : L'intersection d'un cylindre d'axe $\mathcal{D}$, de rayon $R>0$ et d'un plan $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{D}$ ne soit pas parallèle à $\mathcal{P}$ est une ellipse ou un cercle de ce plan.

2°) Coordonnées cylindriques

Afin de mesurer des angles orientés dans le plan (xOy), orientons-le par $\vec{k}$.

Soit $M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ un point de l'espace en dehors de (Oz) et H son projeté sur (xOy).

Posons $\rho=OH$ et $\varphi=(\vec{i},\overrightarrow{OH})\ \ [2\pi]$ de sorte que (ρ,φ) soit un système de coordonnées polaires du point H dans le plan (xOy).
Posons z la hauteur du point M.

Déf : Le triplet (ρ,φ,z) est appelé système de coordonnées cylindriques du point M relativement au repère $\mathcal{R}$.
ρ est appelé distance à l'axe, φ est appelé azimut (ou longitude) et z est appelé cote du point M.

Introduisons $\vec{u}_\rho=\cos\varphi.\vec{i}+\sin\varphi.\vec{j}$, $\vec{u}_\varphi=\vec{k}\wedge\vec{u}_\rho-\sin\varphi.\vec{i}+\cos\varphi.\vec{j}$. On a $\overrightarrow{OM}=\rho.\vec{u}_\rho+z.\vec{k}$.

Déf : Le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_M=(M;\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{k})$ est appelé repère cylindrique associé au point M.

Prop : Si M a pour coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) alors ses coordonnées cartésiennes sont $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\y=\rho\sin\varphi\\z=z\end{cases}$.

3°) Sphère de l'espace

a) définition

Déf : Soit $\Omega\in\mathcal{E}$ et $R\geq 0$.
On appelle sphère de centre Ω et de rayon R l'ensemble $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\Omega,R)=\{M\in\mathcal{E}/\Omega M=R\}$.
Lorsque $R=0$, on parle de sphère point. Lorsque $R>0$, on parle de vraie sphère.

Déf : Soit M un point d'une vraie sphère de centre Ω. Le plan passant par M et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega M}$ est appelé plan tangente à $\mathcal{S}$ en M.

b) équation cartésienne

Prop : Les sphères de centre $\Omega\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ correspondent aux surfaces de l'espace ayant une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz=d$ avec $d\in\mathbb{R}$ tel que $d+a^2+b^2+c^2\geq 0$.

Prop : Si $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{vmatrix}$ est un point d'une vraie sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz=d$ alors l'équation de la tangente en M à cette sphère et $xx_0+yy_0+zz_0+a(x+x_0)+b(y+y_0)+c(z+z_0)=d$.

c) incidence d'une sphère et d'une droite

Soit $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\Omega,R)$ une sphère et $\mathcal{D}$ une droite.
Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$ et $d=\Omega H$.
Pour $M\in\mathcal{D}$, on a $\Omega M^2=MH^2+H\Omega^2$ donc $M\in\mathcal{S}\Leftrightarrow MH^2=R^2-d^2$.
Si $R<d$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{D}=\varnothing$.

Si $R=d$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{D}=\{H\}$, $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan tangent à $\mathcal{S}$ en H.

Si $R>d$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{D}$ est la réunion de deux points symétriques par rapport à H.

d) incidence d'une sphère et d'un plan

Soit $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\Omega,R)$ une sphère et $\mathcal{P}$ un plan.

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$, posons $d=\Omega H$.

Pour $M\in\mathcal{P}$, on a $\Omega M^2=MH^2+H\Omega^2$ donc $M\in\mathcal{S}\Leftrightarrow MH^2=R^2-d^2$.

Si $R<d$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{P}=\varnothing$.

Si $R=d$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{P}=\{H\}$, $\mathcal{P}$ est le plan tangent à $\mathcal{S}$ en H.

Si $R>d$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{P}$ est un cercle du plan $\mathcal{P}$ de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$.

e) incidence de deux sphères

Soit $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\Omega,R)$ et $\mathcal{S}'=\mathcal{S}(\Omega',R')$ deux sphères.

Si $\Omega=\Omega'$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'=\varnothing$ si $R\neq R'$ et $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'=\mathcal{S}$ si $R=R'$.

Si $\Omega\neq\Omega'$ posons $d=\Omega\Omega'$.

Si $d<|R-R'|$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'\neq\varnothing$ (sphères intérieures l'une à l'autre)

Si $d=|R-R'|$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$ est réduit à un point (sphères intérieures tangentes)

Si $|R-R'|<d<R+R'$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$ est un cercle d'un plan orthogonal à $(\Omega\Omega')$.

Si $d=R+R'$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$ est réduit à un point (sphères extérieures tangentes)

Si $d>R+R'$ alors $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'=\varnothing$ (sphères extérieures l'une à l'autre).

4°) Coordonnées sphériques

Afin de mesurer des angles orientés dans le plan (xOy), orientons-le par $\vec{k}$.

Soit $M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ un point de l'espace autre que O et H son projeté sur (xOy).

Posons $r=OM$, $\theta=\text{Ecart}(\vec{k},\overrightarrow{OM})\in[0,\pi]$ et $\varphi=(\vec{i},\overrightarrow{OH})\ \ [2\pi]$.

Déf : Le triplet (r,θ,φ) est appelé système de coordonnées sphériques du point M relativement au repère $\mathcal{R}$.
r est appelé distance à l'origine, θ est appelé colatitude et φ est appelé azimut (ou longitude).

Posons $\vec{u}_r=\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$, $\vec{u}_\varphi=-\sin\varphi.\vec{i}+\cos\varphi.\vec{j}$ et $\vec{u}_\theta=\vec{u}_\varphi\wedge\vec{u}_r$. On a $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_r$.

Déf : Le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_M=(M;\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ est appelé repère sphérique associé au point M.

Prop : Si M a pour coordonnées sphériques (r,θ,φ) alors M a pour coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\y=r\sin\theta\sin\varphi\\z=r\cos\theta\end{cases}.$$